A combinatorial approach to the conjugacy classes of Mathieu simple groups

沢辺, 正人

数理解析研究所講究録
962巻 1996年 133-136

A combinatorial approach to the conjugacy classes of Mathieu simple groups.

沢辺 正人 (Masato Sawabe)
熊本大学大学院理学研究科

1 はじめに

最初の散在型単純群である5つのMathieu群は1860年代にMathieuによって発見されており、1904年にFrobenius [3] が24次Mathieu群の指標表を決定している。同時にその共役類も決定しているのであるが、そこには証明が載っておらずいまだにそれを完全に書いたものはないようである。ところで、1970年代にConway [1]、Curtis [2] らによって24次Mathieu群がBinary Golay Codeを使って新たに定義されている。さらに、近藤 [4] はこの組合せ論的性質を使って24次Mathieu群の位数2と位数3の元の共役類を決めている。そこで、ここでは24次Mathieu群の残りの共役類、さらには23次、22次のMathieu群の共役類を [4] と同様に組合せ論的に決定することができることを述べる。詳細については [5] を参照されたい。

2 準備

まず最初に言葉の定義をして以下の議論で必要な2つの事実を述べる。$\mathbf{\Omega}$ を24点集合とし、有限集合 X に対して S_X を X 上の置換全体とする。

定義 1 $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$ を $\mathbf{\Omega}$ の巾集合とすると $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$ は対称差を演算として2元体上の24次元ベクトル空間になる。この時 $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$ の部分空間 $\mathbf{\Gamma}$ で次の条件を満たすものを *Binary Golay Code* と呼ぶ。

$$\mathbf{\Gamma} \ni X \neq \phi \Longrightarrow |X| \geq 8$$
$$\dim \mathbf{\Gamma} = 12$$

さらに $\mathcal{O} := \{X \in \mathbf{\Gamma} \mid |X| = 8\}$ と置くと $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{O})$ は *Steiner system* $S(5,8,24)$ である。ここで *Steiner system* $S(5,8,24)$ は一意的に定まる 。$\mathcal{O}$ の各元を *octad* と呼ぶ。

定義 2 *Steiner system* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{O})$ に対して $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{O})$ の自己同型群を次の様に定義する。

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{\Omega}, \mathcal{O}) := \{\sigma \in S_{\mathbf{\Omega}} | \mathcal{O}^\sigma = \mathcal{O}\}$$

この自己同型群を 24 次 *Mathieu* 群と呼び M_{24} と表す。

定義 3 $\mathbf{\Omega}$ の 7 点順列 $(x_1 x_2 \cdots x_7)$ に対して

$$\begin{array}{l} \{x_1, x_2, \cdots, x_6\} \text{ を含む } octad \text{ は存在しない} \\ \{x_2, x_3, \cdots, x_7\} \text{ を含む } octad \text{ が存在する} \end{array}$$

なる時この順列を M-順列と言う。$\mathfrak{M} := \{\ M\text{-順列全体}\ \}$ と置く。

octads、M-順列に対して次の事実が知られれいる。

事実 1 ([4]) M_{24} は M-順列全体の集合に正則に作用する。つまり、$|M_{24}| = |\mathfrak{M}|$ が成り立つ。

事実 2 ([1], [2], [4]) $\mathcal{O} \ni C$ に対して $H(C) := \{\sigma \in M_{24} | C^\sigma = C\}$ と置くと $H(C)$ は C 上に 8 次交代群 A_8 として作用する。

3 共役性

最初にも述べた様に 24、23、22 次の Mathieu 群の共役類をすべて組合せ論的に決める事ができる。ここでは 例として 24 次 Mathieu 群の $(4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4)$ 型の元の共役性を述べる。もちろん、$(4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4)$ 型の元の存在を仮定するのではなく、既に知っているいくつかの位数 2 の元を掛け合わせることによって見つけてくるのである。そこで以下を示す。

M_{24}の $(4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4)$ 型の元はすべて共役で中心化群の位数は 128 である

σ, τ を M_{24} の $(4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4)$ 型の元として

$$\begin{array}{l} \sigma = (x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(y_1, y_2)(y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4) \cdots \\ \tau = (s_1)(s_2)(s_3)(s_4)(t_1, t_2)(t_3, t_4)(u_1, u_2, u_3, u_4) \cdots \end{array}$$

と置く。$Z := \{x_1, z_1, z_2, z_3, z_4\}$ を含む octad を C とすると $C^\sigma = C$ より

(1) $$C = Z \cup \{x_2, x_3, x_4\}$$

(2) $$C = Z \cup \{x_2, y_1, y_2\}$$

のどちらかであると仮定してよい。ところが (1) の時は事実 1 に矛盾する。(2) の時、順列 $(x_3x_2x_1z_1z_2z_3z_4)$ は M-順列になる。τ に対しても同様に $(s_3s_2s_1u_1u_2u_3u_4)$ が M-順列であるとしてよい。事実 2 から M_{24} は M-順列全体に正則に作用しているので $\rho : s_i \longmapsto x_i$ $(i=1,2,3)$, $\rho : u_i \longmapsto z_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ なる M_{24} の元 ρ が存在する。この時

$$\rho^{-1}\tau\rho = (x_3)(x_2)(x_1)(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)\cdots$$

であるから

$$(\rho^{-1}\tau\rho)\sigma^{-1} = (x_3)(x_2)(x_1)(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\cdots$$

となる。再び事実 2 から $\rho^{-1}\tau\rho = \sigma$ となり M_{24} の $(4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4)$ 型の元はすべて共役である。次に中心化群の位数を求めるために次の様な組の集合 $\mathfrak{L}$ を考える。

$$\mathfrak{L} = \left\{ (\sigma, (x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7)) \;\middle|\; \begin{array}{l} M_{24} \ni \sigma = (4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4) \text{ 型} \\ (x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7) : M\text{-順列} \\ \sigma = (x_1)(x_2)(x_3)(x_4, x_5, x_6, x_7)\cdots \end{array} \right\}$$

σ を $(4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4)$ 型の元とすると $\mathfrak{L}$ の条件を満たす M-順列は $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2$ 通り存在する ($x_4x_5x_6x_7$ の選び方が 4·4 通り、x_3 の選び方が 4 通り、x_2 の選び方が 1 通り、x_1 の選び方が 2 通り)。逆に M-順列 $(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7)$ を与えた時 $(x_1)(x_2)(x_3)(x_4, x_5, x_6, x_7)$ を巡回因子として含む $(4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4)$ 型の元 σ と τ が存在したとすると $\sigma\tau^{-1}$ は M-順列 $(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7)$ を固定するので M_{24} の正則性から $\sigma = \tau$ となる。つまり M-順列に対して $\mathfrak{L}$ の条件を満たす $(4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4)$ 型の元は一意的に定まる。そこで $t := |\{\sigma \in M_{24} | \sigma = (4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4) \text{ 型 }\}|$ と置き $\mathfrak{L}$ の濃度を数え挙げる。

$$\begin{aligned} |\mathfrak{L}| &= t \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= |\mathfrak{M}| \cdot 1 \\ &= |M_{24}| \end{aligned}$$

つまり $|M_{24}| \,/\, t = 128$ より $|C_{M_{24}}((4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4) \text{ 型})| = 128$ となる。

これと同様に、他の次数の Mathieu 群の共役類も組合せ論的に決める事ができる。また、ここで本質的にきいているのは M_{24} の正則性 (事実 1) である。これは共役性を示す時だけではなく Mathieu 群の構造を調べる上でも重要な役割をはたす。最後に、ここで得た Mathieu 群の共役類の表は Frobenius ([3]) や Todd ([6]) の表ともちろん一致していたことを付け加えておく！

参考文献

[1] J. H. Conway, *Three lectures on exceptional groups*, in "Finite Simple Groups" (Powell and Higman, eds.), Academic Press, (1971) 215–247.

[2] R. T. Curtis, *A new combinatorial approach to M_{24}*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **79**, (1976) 25–42.

[3] G. Frobenius, *Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen*, Berliner Berichte (1904) 558–571.

[4] 近藤武, 講義録 (東京大学).

[5] M. Sawabe, *A combinatorial approach to the conjugacy classes of Mathieu simple groups, M_{24}, M_{23}, M_{22}*, preprint.

[6] J. Todd, *A representation of the Mathieu group M_{24} as a collineation group*, Ann. Math. Pura Appl. series IV **71**, (1966) 199–238.